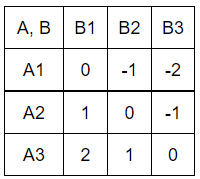
Лабораторная работа №3   
Решение матричных игр методом минимакса

Количественная оценка результатов игры называется **платежом**. **Платежи** отражают исход игры. С точки зрения математики **исход игры** – значение некоторой функции, которая называется **функцией выигрыша** или **платёжной функцией**. Платёжная функция определяет для каждой совокупности выбранных игроками стратегий выигрыш каждой из сторон. Платёжная функция может быть представлена таблицей, матрицей или аналитическим выражением.

Пусть имеются 2 игрока, каждый из которых может записать независимо от другого цифры 1, 2 и 3. Если разность между цифрами, записанными игроками больше 0, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности. Если разность меньше 0, то выигрывает второй игрок. Если разность равна 0, то игра заканчивается вничью. Необходимо дать рекомендации игрокам, какую из стратегий считать оптимальной.



Величина *a* – гарантированный выигрыш игрока A или нижняя цена игры (максимин). Соответствующая данной величине стратегия игрока A (строка) называется максимином.

Величина *B* – верхняя цена игры (минимакс). Соответствующая ей стратегия игрока B (столбец) называется минимаксной.

Рассмотрим пример применения алгоритам решения матричных игр методом минимакса. Имеется две конкурирующие компании (A и B). Компания B ведет переговоры с организаторами каждого из трех проектов на предмет инвестирования. Задача компании В – добиться положительного результата переговоров. Компания А ставит своей целью свести переговоры компании В к отрицательному результату с тем, чтобы занять место компании В в инвестировании.

Компания A для достижения своей цели (срыва переговоров компании В) может применить одно из средств: - предложить организаторам проектов более выгодные для них условия инвестирования и - представить в распоряжение организаторов проектов материалы, компрометирующие компанию B.

Стратегия компании A приводит к отрицательному результату переговоров компании B с организаторами проектов соответственно с вероятностями 0,7;0,5 и 0,3, а стратегия с вероятностями 0,6; 0,9 и 0,4.

Поскольку цели компаний A и B противоположны, то рассматриваемая конфликтная ситуация является **антагонистической**. Составьте платежную матрицу для данного примера, рассматривая в качестве выигрыша игрока А (или проигрыша игрока В) вероятность отрицательного результата переговоров компании В. Определите чистые стратегии компании A и В. Имеется ли для данной игры ***устойчивая*** ситуация (пара стратегий, от которых невыгодно отступать ни одной из компаний), т.е совпадают ли нижняя и верхняя цены игры ?

***Самостоятельное задание 1***

Два предприятия производят и поставляют продукцию на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции и полностью контролируют рынок данной продукции в регионе. Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением ***одной из трех*** различных технологий. В зависимости от экологичности технологического процесса и качества продукции, произведенной по каждой технологии, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 12, 8 и 5 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции. Данные о цене реализации себестоимости приведены в таблице 1.

Таблица 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Технология | Цена реализации единицы продукции, д.е. | Полная себестоимость единицы продукции, д.е. | |
| Предприятие 1 | Предприятие 2 |
| I | 12 | 6 | 8 |
| II | 8 | 3 | 2 |
| III | 5 | 2 | 1 |

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию: Y = 6 – 0,5 X, где Y -количество продукции, которое приобретет население региона (тыс. ед.), а X - средняя цена продукции предприятий (д.е.).

Данные о спросе на продукцию в зависимости от цен реализации приведены в таблице. Доля продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависит от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена, и соответствующие значения расположены в последнем столбце таблицы 2:

Таблица 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Цена реализации 1 ед. продукции, д.е. | | Средняя цена реализации 1 ед. продукции, д.е. | Спрос на продуцию, тыс. ед. | Доля продукции предприятия 1, купленной населением |
| Предприятие 1 | Предприятие 2 |
| 10 | 10 | 10 | 1 | 0,57 |
| 10 | 6 | 8 | 2 | 0,42 |
| 10 | 2 | 6 | 3 | 0,25 |
| 6 | 10 | 8 | 2 | 0,8 |
| 6 | 6 | 6 | 3 | 0,4 |
| 6 | 2 | 4 | 4 | 0,3 |
| 2 | 10 | 6 | 3 | 0,92 |
| 2 | 6 | 4 | 4 | 0,85 |
| 2 | 2 | 2 | 5 | 0,72 |

По условию задачи на рынке региона действует только 2 предприятия. Поэтому долю продукции второго предприятия, приобретенной населением, в зависимости от соотношения цен на продукцию можно определить как единица минус доля первого предприятия.

Стратегиями предприятий в данной задаче являются их решения относительно технологий производства продукции. Эти решения определяют ***себестоимость*** и ***цену реализации*** единицы продукции. В задаче необходимо определить:

* Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?
* Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?
* Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении?

Комментарии

Определим экономический смысл коэффициентов выигрышей в платежной матрице задачи. Каждое предприятие стремится к максимизации прибыли от производства продукции. Но, кроме того, предприятия ведут борьбу за рынок продукции в регионе. При этом ***выигрыш*** одного предприятия означает ***проигрыш*** другого. Такая задача может быть сведена к ***матричной игре с нулевой суммой***. При этом коэффициентами выигрышей будут значения ***разницы прибыли*** предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции. В случае, если эта разница положительна, выигрывает предприятие 1, а в случае, если она отрицательна — предприятие 2.

Рассчитаем коэффициенты выигрышей платежной матрицы. Для этого необходимо определить значения прибыли предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции.

Прибыль предприятия в данной задаче зависит: от цены и себестоимости продукции; количества продукции, приобретаемой населением региона; доли продукции, приобретенной населением у предприятия.

Таким образом, значения разницы прибыли предприятий, соответствующие коэффициентам платежной матрицы, необходимо определить по формуле:



где D — значение разницы прибыли от производства продукции предприятия 1 и предприятия;

p — доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением региона;

S — количество продукции, приобретаемой населением региона;

R1 и R2 — цены реализации единицы продукции предприятиями 1 и 2;

C1 и C2 — полная себестоимость единицы продукции, произведенной на предприятиях 1 и 2.

Вычислим один из коэффициентов платежной матрицы.

Пусть, например, предприятие 1 принимает решение о производстве продукции в соответствии с технологией I, а предприятие 2 — в соответствии с технологией III. Тогда цена реализации единицы. продукции для предприятия 1 составит 12 д.е. при себестоимости единицы. продукции 6 д.е. Для предприятия 2 цена реализации единицы. продукции составит 5 д.е. при себестоимости 1 д.е..

Количество продукции, которое население региона приобретет при средней цене 6 д.е., равно 3 тыс. ед. (таблица 2). Доля продукции, которую население приобретет у предприятия 1, составит 0,25, а у предприятия 2 — 0,75 (табл. 2). Вычислим коэффициент платежной матрицы a13 по формуле:



где i=1 — номер технологии первого предприятия, а j=3 — номер технологии второго предприятия.

Аналогично вычислите все оставшиеся коэффициенты платежной матрицы. Представьте результат в виде платежной матрицы следующего вида (здесь стратегии A1 - A3– представляют собой решения о технологиях производства продукции предприятием 1, стратегии B1- B3 — решения о технологиях производства продукции предприятием 2, коэффициенты выигрышей — разницу прибыли предприятия 1 и предприятия).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | Minj |
| A1 |  |  |  |  |
| A2 |  |  |  |  |
| A3 |  |  |  |  |
| Maxi |  |  |  |  |

Определите нижнюю и верхнюю цену игры. Совпадают ли они в данном случае? Если это так, то существует технология производства продукции, которая является оптимальной для обоих предприятий. Какие стратегии производства являются чистыми оптимальными стратегиями? Какое из предприятий выиграет в данной игре и какова величина этого выигрыша? Сколько при будет реализовано тысяч единиц продукции (реализация равна спросу на продукцию, таблица 2).

***Самостоятельное задание 2***

Фирма А рассматривает возможность вывода одного из трех производимых ею товаров на один из потенциально доступных рынков. В зависимости от того, на какой рынок она выйдет, ее конкурентом станет фирма B, C или D.

Предполагая, что в любом случае у фирмы А будет ***лишь один конкурент*** (B, C или D), имеющий ряд стратегий, определите цену игры и наиболее привлекательный для А рынок сбыта.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
| A1 | -2 | 0 | 3 | -1 | 1 |
| A2 | -1 | 5 | -2 | -2 | -1 |
| A3 | -3 | -4 | 0 | -2 | -2 |
| A4 | 3 | 5 | 3 | 3 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C1 | C2 | C3 | C4 |
| A1 | 4 | -4 | -1 | 0 |
| A2 | 7 | 6 | 2 | 6 |
| A3 | 5 | 4 | -6 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | D1 | D2 | D3 | D4 |
| A1 | -6 | 5 | -3 | 2 |
| A2 | -3 | 4 | 3 | -6 |
| A3 | -3 | 7 | 5 | -3 |
| A4 | -3 | -1 | -4 | 8 |
| A5 | -6 | 1 | -6 | 5 |

Решение матричных игр в смешанных стратегиях с помощью линейной оптимизации

Оптимальные стратегии игроков в играх без седловых точек могут быть найдены путем решения пары двойственных задач линейной оптимизации.

|  |  |
| --- | --- |
| Определение стратегий игрока I | Определение стратегий игрока II |
|  |  |

Цена игры и вероятности применения стратегий игроками I и II равны:

******

***Пример 1.***

Найдите решение парной игры с заданной платежной матрицей, приведенной ниже. Решите задачу с помощью линейной оптимизации, определите цену игры и вероятности применения активных стратегий.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | 14 | 20 | 32 | 8 |
| A2 | 15 | 11 | 19 | 37 |
| A3 | 33 | 9 | 16 | 34 |

***Пример 2.***

Два конкурирующих предприятия имеют следующие доли общего сбыта своей продукции на местном рынке: 53% предприятие 1 и 47% – предприятие 2. Для увеличения объема своих продаж у них имеются следующие альтернативы:  – расширить сеть сбыта,  – увеличить затраты на рекламу своей продукции,  – расширить ассортимент,  – ничего не предпринимать.

Анализ показал, что при реализации обоими предприятиями указанных мероприятий доля (в %) предприятия на рынке изменится следующим образом:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Стратегия предприятия 1 | Стратегия предприятия 2 | | | |
|  |  |  |  |
|  | -4 | -5 | -1 | 6 |
|  | -1 | 0 | -3 | 5 |
|  | -3 | 1 | -5 | 5 |
|  | -8 | -7 | -6 | 0 |

Требуется сформулировать данную ситуацию в виде игры и определить оптимальные смешанные стратегии обоих предприятий.

***Решение.*** Обратите внимание, что в данном примере для обоих игроков имеются доминируемые стратегии. Найдите и исключите их из матрицы игры.

Затем необходимо избавиться от отрицательных значений элементов платежной матрицы. Для этого прибавьте к каждому элементы матрицы достаточно большое положительное число.

Запишите и решите прямую и двойственную задачи ЛП и определите вероятности применения чистых стратегий обоими игроками:

Вы должны получить следующий результат.

Цена игры, соответствующая первоначальной матрице, равна –2,2 (после того, как на начальном этапе мы прибавили ко всем элементам некоторое число, теперь необходимо его вычесть).

Предприятие 1 при многократном повторении игры должно использовать с частотой 0,4 стратегию  (расширить сеть сбыта), с частотой   
0,6 – стратегию – (расширение рекламной деятельности), а стратегии  (увеличить ассортимент) и  (ничего не предпринимать) не использовать вовсе. При этом доля сбыта предприятия на рынке ***уменьшится*** на 2,2%.

В свою очередь, оптимальная смешанная стратегия предприятия   
2 заключается в том, чтобы с частотой 0,4 использовать стратегию  (расширить сеть сбыта), и с частотой 0,6 – стратегию – (расширение ассортимента). Стратегии  (расширение рекламной деятельности) и  (ничего не предпринимать) не должны применяться. При этом доля сбыта предприятия 2 на рынке ***увеличится*** на 2,2%.

Казалось бы, поскольку даже в результате проведения своих мероприятий предприятие 1 “теряет рынок”, ему не следует ничего предпринимать, однако в этом случае оно потеряет еще больше (в соответствии   
со стратегией ) из-за действий предприятия 2, которому они выгодны.

***Определение выигрышей в игре без седловых точек***

Средний выигрыш игрока А в том случае, когда оба игрока применяют свои оптимальные смешанные стратегии (***функция выигрыша игрока А в смешанных стратегиях***) равен



где вектор-строка задает вероятности применения различных чистых стратегий первым игроком ,  - платежная матрица и  – вектор-столбец вероятностей применения чистых стратегий вторым игроком:



В тех случаях, когда один из игроков применяет чистую стратегию,   
а второй – смешанную, нужно “занулить” все вероятности, соответствующие неиспользуемым этим игроком стратегиям. Например, если первый игрок использует чистую стратегию , то для определения выигрыша достаточно заменить вектор  на вектор .

***Пример 3.*** Задана платежная матрица

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 0 | 1/2 | 5/6 |
|  | 1 | 3/4 | 1/2 |

Пусть оптимальные смешанные стратегии игроков А и В уже определены:



Требуется определить выигрыши игрока А в ситуациях, когда

1. игрок В применяет смешанную стратегию;
2. игрок В применяет одну из чистых стратегий (,, или ).

Проанализируйте полученные результаты.